

1. Даны прямая $y = x$ и парабола $y^2 = 2px$.

p – положительный параметр.

Точка A лежит в первом квадранте и является точкой пересечения данных параболы и прямой.

(к) Выразите через p координаты точки A .

Обозначим через ℓ касательную к параболе в точке A .

Точка F – фокус параболы. Окружность I с центром в точке F касается прямой ℓ в точке B .

(а) Выразите через p уравнение окружности I .

(б) Покажите, что точка B лежит на оси y .

Дано: $AB = 4\sqrt{5}$.

(г) Найдите значение p .

(н) Найдите уравнение геометрического места центров окружностей с радиусом $2\sqrt{5} - 3$, которые касаются окружности I изнутри.

решение:

$$\text{N } y = x \Rightarrow y^2 = 2px \Rightarrow y(y - 2p) = 0 \Rightarrow y = 0, y = 2p \Rightarrow (0,0), (2p,2p)$$

точка A лежит в первом квадранте $\Rightarrow A(2p, 2p)$

1 Найдём уравнение касательной, проходящей через точку A : $y = mx + b$, где $m = y'$ в точке A

$$y^2 = 2px \Rightarrow 2yy' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y} \Rightarrow \text{в точке } A \ y' = \frac{p}{2p} = 0.5 \Rightarrow y = 0.5x + b$$

$$A(2p, 2p) \Rightarrow 2p = 0.5 * 2p + b \Rightarrow b = p \Rightarrow y = 0.5x + p \text{ — уравнение касательной}$$

Найдём расстояние от точки фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ до касательной $x - 2y + 2p = 0$

$$d = \frac{\left(\frac{p}{2} - 2 * 0 + 2p\right)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}p \text{ — это радиус окружности}$$

$$\text{уравнение окружности: } \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}p^2$$

2 Покажем, что точка B лежит на оси y :

общая касательная $y = 0.5x + p$ пересекает ось y в точке $(0, p)$

$$\text{Точка } (0, p) \text{ лежит на окружности: } \left(0 - \frac{p}{2}\right)^2 + p^2 = \frac{5}{4}p^2 \Rightarrow$$

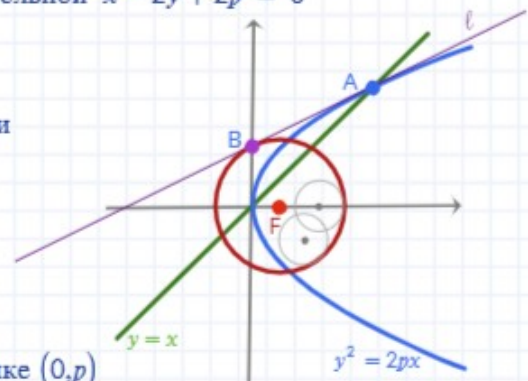
$$(0, p) \text{ — это точка касания окружности и прямой } y = 0.5x + p \Rightarrow B(0, p)$$

3 Найдём расстояние AB : $A(2p, 2p), B(0, p) \Rightarrow |AB|^2 = (2p)^2 + (2p - p)^2 = 5p^2$

$$|AB| = 4\sqrt{5} \Rightarrow p = 4$$

4 Геометрическое место центров окружностей — это окружность с центром в точке F :

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}p - (2\sqrt{5} - 3)\right)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 9$$



2. На чертеже справа изображена пирамида $SABCD$ с квадратным основанием $ABCD$.

Ребро AS – высота пирамиды.

Длина ребра AS равна длине стороны квадрата $ABCD$.

Точка E – такая точка на ребре SD , что $SE = \frac{3}{4} \cdot SD$.

Для точки N выполняется: $\overrightarrow{SN} = k \cdot \overrightarrow{SC}$, k – параметр.

Обозначим: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

(к) Выразите вектор $\overrightarrow{EN}$ при помощи $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ и k .

Дано: $|\overrightarrow{EN}| = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot |\underline{w}|$.

(а) Найдите значение k .

Подставьте $k = \frac{1}{2}$ и ответьте на вопросы пунктов (а)–(г).

Пирамиду располагают в системе координат так, что $A(0, 0, 0)$, $B(0, 12, 0)$.

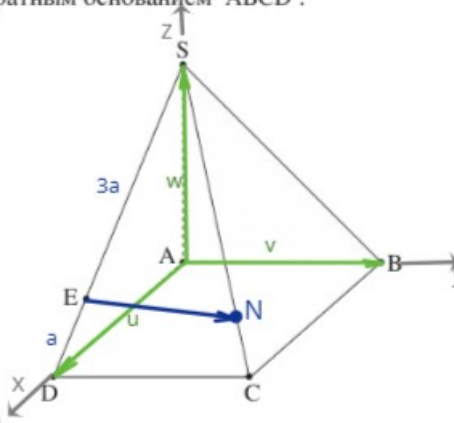
Вершина D лежит на положительной части оси x , а вершина S лежит на положительной части оси z .

(а) (1) Найдите координаты точек N и E .

(2) Найдите уравнение плоскости ENB .

(г) Больше ли объем пирамиды $SENB$ объема пирамиды $CENB$, меньше его или равен ему?

Обоснуйте свой ответ.



решение:

$$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SE} = k\overrightarrow{SC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{SD} = k(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) - \frac{3}{4}(\underline{u} - \underline{w})$$

$$\overrightarrow{EN} = \left(k - \frac{3}{4}\right)\underline{u} + k\underline{v} + \left(\frac{3}{4} - k\right)\underline{w}$$

$$|\overrightarrow{EN}| = \frac{\sqrt{6}}{4}|\underline{w}|, \quad |\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}| \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \left(k - \frac{3}{4}\right)^2 + k^2 + \left(\frac{3}{4} - k\right)^2 \Rightarrow (2k - 1)^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\text{Найдем координаты } E \text{ и } N: \quad \underline{u}(12, 0, 0), \underline{v}(0, 12, 0), \underline{w}(0, 0, 12)$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SE} = \underline{w} + \frac{3}{4}(\underline{u} - \underline{w}) = \frac{3}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w} = (9, 0, 0) + (0, 0, 3) = (9, 0, 3) \Rightarrow E(9, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SN} = \underline{w} + \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) = (0, 0, 12) + \frac{1}{2}((12, 0, 0) + (0, 12, 0) - (0, 0, 12)) = (6, 6, 6) \Rightarrow N(6, 6, 6)$$

Найдем уравнение плоскости ENB : $Ax + By + Cz + D = 0$

$$B(0, 12, 0) \Rightarrow 12B + D = 0$$

$$E(9, 0, 3) \Rightarrow 9A + 3C + D = 0$$

$$N(6, 6, 6) \Rightarrow 6A + 6B + 6C + D = 0$$

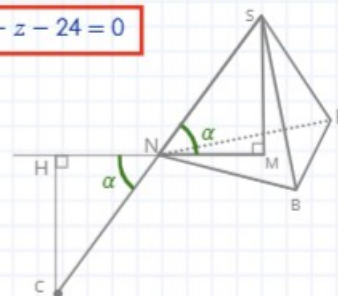
$$\begin{cases} D = -12B, \\ 3A + C - 4B = 0 \\ A + C - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3, B = 2, C = -1, D = -24 \end{cases} \Rightarrow 3x + 2y - z - 24 = 0$$

Сравним объемы пирамид:

$$k = \frac{1}{2} \Rightarrow |SN| = |CN|$$

$$V_{SENB} = \frac{1}{3}S_{ENB} \cdot |SN| \sin \alpha = \frac{1}{3}S_{ENB} \cdot |CN| \sin \alpha = V_{CENB} \Rightarrow$$

$$V_{SENB} = V_{CENB}$$



3. Даны три комплексных числа:

$$z_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^\circ) + i \cdot \sin(\alpha + 90^\circ)), w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2},$$

$$r > 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Точка А представляет число w на гауссовой плоскости.

Известно, что координата x точки А равна -1 .

(8) Найдите значение α .

Известно, что точка А лежит на прямой $y = -1$.

(2) Найдите значение r .

$$\text{Дано уравнение } z^4 = 128 \cdot (z_1 \cdot w)^2.$$

z – комплексная переменная.

(3) Найдите все четыре решения данного уравнения.

Точка О – начало координат.

Каждая из точек В и С представляет одно из тех решений, которые вы нашли в пункте (3).

Точка В лежит в первом квадранте, а точка С – во втором квадранте.

Геометрическое место всех точек $z = x + iy$ на гауссовой плоскости, для которых выполняется $|z| = b$, пересекает положительную часть оси y в точке К.

b – положительное действительное число.

Известно, что площадь четырехугольника СКВО равна $7\sqrt{2}$.

05 (7) Найдите значение b .

(продолжение на странице 4)

решение:

$$w = (\cos(2\alpha + 90^\circ) + i \cdot \sin(2\alpha + 90^\circ)) + r^2(\cos(-90^\circ) + i \cdot \sin(-90^\circ)) = -\sin(2\alpha) + i \cdot \cos(2\alpha) - i \cdot r^2$$

$$\text{точка А: } -\sin(2\alpha) = -1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$w = -1 - i \cdot r^2$$

$$\text{дано } A(-1, -1), r > 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow w = -1 - i = -\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_1 \cdot w = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) * (-\sqrt{2}) \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-\sqrt{2}) \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -i \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{решим уравнение } z^4 = 2^7(-i \cdot \sqrt{2})^2 \Rightarrow z^4 = -2^8 \Rightarrow$$

$$r^4 \operatorname{cis}(4\alpha) = (-1) \cdot 4^4 \Rightarrow r = 4, 4\alpha = \pi + 2\pi k \Rightarrow$$

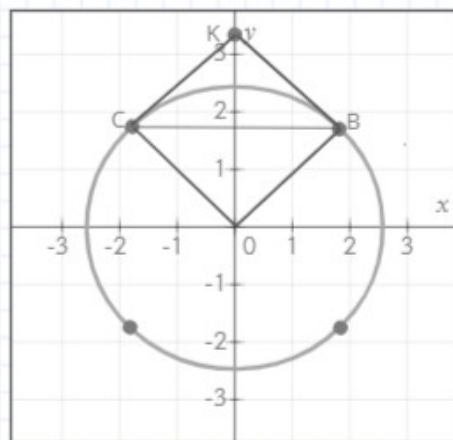
$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow z_k = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}(1 + i), z_2 = 2\sqrt{2}(-1 + i),$$

$$z_3 = 2\sqrt{2}(-1 - i), z_4 = 2\sqrt{2}(1 - i)$$

$$\text{Найдем } b: |KO| = b, S_{CKBO} = |KO| \cdot \frac{|CB|}{2} = b \cdot \frac{(|OB| \cdot \sqrt{2})}{2} = b \cdot \frac{(4 \cdot \sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}b$$

$$S_{CKBO} = 7\sqrt{2} = 2\sqrt{2}b \Rightarrow b = 3.5$$



4. Дана функция $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{5}{e^x - 5} + a$.

a – параметр.

(к) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

Если нужно, выразите свои ответы при помощи a .

(з) Докажите, что производная $f'(x)$ отрицательна на всей своей области определения.

Известно, что прямая $y = 2$ является асимптотой функции $f(x)$.

(л) Найдите два возможных значения a .

Подставьте $a = 2$ в функцию $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (т)–(и).

(т) Покажите, что $f(x) = \frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5}$.

(н) (1) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .

(2) Начертите схематический график функции $f(x)$.

(и) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью x и прямой $x = \ln 2$.

решение :

Область определения : $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \ln 5) \cup (\ln 5, +\infty)$

Асимптоты :

$$x \rightarrow +\infty, f \rightarrow a \Rightarrow$$

$$x \rightarrow -\infty, f \rightarrow (-1 - 1 + a) \Rightarrow$$

$$x = 0, \quad x = \ln 5$$

$$y = a$$

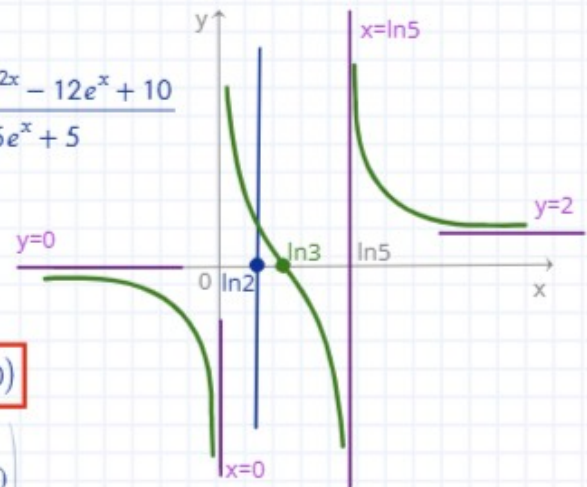
$$y = a - 2$$

Найдем производную : $y' = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{-e^x}{(e^x - 5)^2} = (-e)^x \left(\frac{1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{(e^x - 5)^2} \right) < 0 \Rightarrow y' < 0$

$y = 2$ – асимптота $\Rightarrow a = 2$ или $a = 4$

$$a = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{5}{e^x - 5} + 2 = \frac{6e^x - 10 + 2e^{2x} - 12e^x + 10}{e^{2x} - 6e^x + 5}$$

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5}$$



Найдем координаты точки пересечения с осью X :

$$2e^{2x} - 6e^x = 0, \Rightarrow 2e^x(e^x - 3) = 0 \Rightarrow x = \ln 3 \Rightarrow (\ln 3, 0)$$

$$S = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5} \right) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2e^x - 6}{e^{2x} - 6e^x + 5} d(e^x)$$

$$t = e^x \Rightarrow x = \ln(t) \Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow t = 2, x = \ln 3 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow$$

$$S = \int_2^3 \frac{2t - 6}{t^2 - 6t + 5} dt \quad \text{если } 2 \leq t \leq 3 \Rightarrow 2t - 6 \leq 0 \text{ и } t^2 - 6t + 5 < 0 \Rightarrow$$

$$S = \int_2^3 \frac{-2t + 6}{-t^2 + 6t - 5} dt = \int_2^3 \frac{d((-t)^2 + 6t)}{-t^2 + 6t - 5} = \int_2^3 \frac{d((-t)^2 + 6t - 5)}{-t^2 + 6t - 5} = \ln(-t^2 + 6t - 5) \Big|_2^3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$S = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

5. Дана функция $f(x) = 8 \cdot \ln(x^2 + 7) - 2x$, которая определена для любого x .

(а) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.

(б) Найдите области выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$.

Известно, что график функции $f(x)$ пересекает ось x только в одной точке.

(в) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \ln(f(x) - 18)$, определенная на области, где $f(x) > 18$.

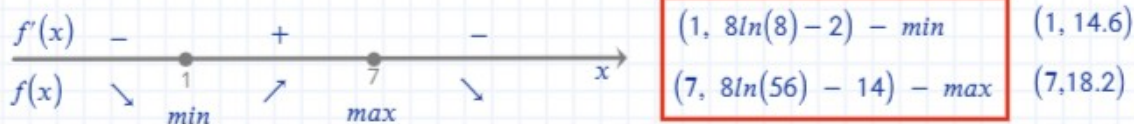
(г) (1) Сколько у функции $g(x)$ асимптот, перпендикулярных оси x ? Обоснуйте свой ответ.

(2) Найдите координаты точки экстремума функции $g(x)$ и определите ее тип.

(3) Начертите схематический график функции $g(x)$.

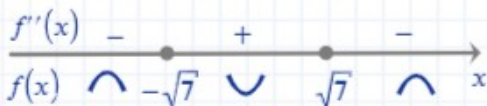
решение :

$$f'(x) = \frac{8 \cdot 2x}{x^2 + 7} - 2, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 16x - 2x^2 - 14 = 0 \Rightarrow (-2)(x-1)(x-7) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 7$$

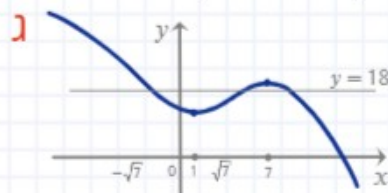


$$\begin{aligned} (1, 8\ln(8) - 2) &- \min & (1, 14.6) \\ (7, 8\ln(56) - 14) &- \max & (7, 18.2) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 16 \frac{x^2 + 7 - 2x \cdot x}{(x^2 + 7)^2} = (-16) \frac{x^2 - 7}{(x^2 + 7)^2}$$



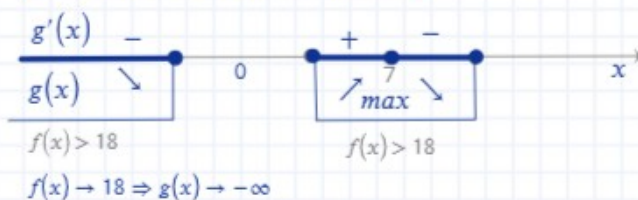
$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty) & f(x) \text{ выпукла вверх} \\ x \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7}) & f(x) \text{ выпукла вниз} \end{aligned}$$



$8\ln(56) - 14 > 18 \Rightarrow$ существует 3 точки в которых $f(x) = 18 \Rightarrow$ если $f(x) \rightarrow 18 \Rightarrow g(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow$ существует 3 асимптоты для $g(x)$, перпендикулярных оси x

$$g'(x) = \frac{(-2)(x-1)(x-7)}{(x^2+7) \cdot (f(x)-18)}, \quad g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ и } x = 7, \text{ но при } x = 1 \quad f(x) < 18 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow$$

$$(7, \ln(8\ln(56) - 32)) \Rightarrow (7, -1.6) - \max$$



$$f(x) > 18$$

$$f(x) > 18$$

$$f(x) \rightarrow 18 \Rightarrow g(x) \rightarrow -\infty$$

